Curvatura della funzione di costo,
differenziazione verticale
e benessere*

Luca Lambertini

Dipartimento di Scienze Economiche
Università degli Studi di Bologna

ottobre 1992

Sommario

Lo scopo di questo lavoro è quello di analizzare il rapporto tra curvatura della funzione di costo, qualità del prodotto e benessere nell'ambito di un modello di differenziazione verticale nei casi di monopolio privato, monopolio pubblico e duopolio privato. I risultati generati dal modello consentono inoltre di avanzare alcune considerazioni riguardanti quella che è nota in letteratura come 'ipotesi schumpeteriana'.

**Desidero esprimere la mia riconoscenza nei confronti di Roberto Censolo, Flavio Delbono, Vincenzo Denicolò, Massimo Matteuzzi, Paolo Onofri, Gianpaolo Rossini e Carlo Scarpa, per aver proficuamente commentato e discusso precedenti versioni di questo lavoro. Ringrazio inoltre Ennio Cavazzuti, Nicoletta Pacchiarotti, Claudia Scarani e Dario Sermasi per il loro insostituibile supporto formale. Naturalmente, la responsabilità di quanto scritto resta esclusivamente mia.*

Introduzione

La letteratura esistente sulla differenziazione del prodotto dedica scarsa attenzione al rapporto tra la curvatura della funzione di costo (cioè della tecnologia),[1] lo spettro dei prodotti offerti, ed il benessere, se non nella misura in cui la definizione delle caratteristiche dei vincoli tecnologici è necessaria al fine di garantire una soluzione economicamente significativa al problema di ottimo dell'impresa o delle imprese operanti sul mercato,[2] oppure rappresenta l'ipotesi più aderente alle reali condizioni di produzione.[3]

Ci proponiamo quindi di indagare tale relazione, nell'ambito di un modello di differenziazione verticale analogo a quello adottato da Delbono, Denicolò e Scarpa (1991), riguardo tre forme di mercato alternative: monopolio privato, monopolio pubblico e duopolio privato.

L'indagine sarà condotta attraverso simulazioni numeriche che prevedono la soluzione del problema di ottimo relativo a ciascuna forma di mercato, al variare della curvatura della tecnologia.

I risultati ottenuti, per quanto da valutarsi con occhio critico, sembrano suggerire che la relazione tra gli spettri di prodotto offerti in monopolio e in duopolio non è invariante al variare delle caratteristiche che definiscono la funzione di costo.

Inoltre, se da un lato il particolare legame esistente in questa classe di modelli tra tecnologia e qualità del prodotto suggerisce la possibilità di analizzare la variazione della curvatura dei costi sia in termini di innovazione di processo che, meno intuitivamente, in termini di innovazione di prodotto, dall'altro le conseguenze generate da tale variazione sui profitti consentono di avanzare alcune considerazioni riguardanti la ben nota *ipotesi schumpeteriana*.

L'organizzazione del lavoro è la seguente: le sezioni 1-3 descrivono il modello base; nelle sezioni 4-8 sono riportati i risultati scaturiti dalla simulazione; la sezione 9 è dedicata

---

1. La curvatura di una superficie in un punto è definibile come il reciproco del raggio della sfera osculatrice in quel punto, tale cioè da riprodurne, in quello stesso punto, il comportamento (vedi appendice). Intuitivamente, il concetto di curvatura è quindi affine a quello di convessità.

2. La critica rivolta al *principio di minima differenziazione* di Hotelling (1929) da parte di D'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979) è forse l'esempio più rilevante in tal senso.

3. Questo è senz'altro vero nell'ambito dei modelli di differenziazione verticale, in cui peraltro si assume che i costi siano *opportunamente* convessi rispetto alla qualità del prodotto, senza indagare ulteriormente su tale convessità. Cfr., *inter alia*, Shaked e Sutton (1982, 1983).

all'analisi dei risultati asintotici del modello; la sezione 10, infine, è dedicata alla valutazione dei risultati complessivi. In appendice, si analizza in dettaglio il comportamento della funzione di costo lungo i sentieri di equilibrio seguiti dai prodotti e generati attraverso la simulazione.

1. Il modello

Consideriamo un mercato in cui vengono offerti due prodotti differenziati verticalmente, secondo un parametro che denota la qualità, q_i $(i = H, L)$; $q_i \in]0, 1[$.[4] La tecnologia, identica per i due prodotti, è rappresentata da:

$$c = q^n x, \quad n > 1 \tag{1}$$

dove x è la quantità prodotta.[5] La condizione relativa ad n è motivata dalla necessità di garantire che la soluzione del problema di ottimo che ci accingiamo ad analizzare sia accettabile sotto il profilo economico.

La popolazione dei consumatori è continua ed è normalizzata ad uno. Ogni consumatore è caratterizzato dal parametro θ, che è uniformemente distribuito sull'intervallo [0, 1], e può essere interpretato come la propensione marginale alla spesa per la qualità.[6] Inoltre, assumiamo che ogni consumatore acquisti al massimo una unità di prodotto; effettuerà quindi l'acquisto se, data la sua propensione marginale alla spesa, la combinazione qualità-prezzo è tale da fornirgli un surplus non negativo, cioè se è soddisfatta la seguente condizione:

$$U = \theta q_i - p_i \geq 0. \tag{2}$$

E' quindi possibile ripartire i consumatori in tre gruppi: quello formato da coloro che non effettuano alcun acquisto, ottenendo quindi un surplus nullo, quello formato da coloro che

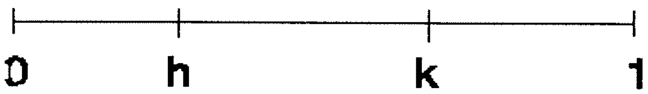
---

4. Come vedremo, questa ipotesi è inessenziale ai fini della simulazione, ma è necessaria per studiare il comportamento asintotico del modello.

5. Dal momento che sono irrilevanti ai fini delle condizioni di primo ordine, è possibile trascurare i costi fissi. L'introduzione di una costante moltiplicativa, inoltre, non comporterebbe alcun vantaggio nè alcuna conseguenza rilevante sui risultati.

6. Il parametro θ corrisponde al reciproco dell'utilità marginale del reddito, o della moneta. Se la funzione di utilità è concava, l'utilità marginale è decrescente: questo implica che la propensione marginale alla spesa per la qualità aumenta all'aumentare del reddito.

acquistano il prodotto di qualità inferiore, q_L, e quello formato da coloro che acquistano il prodotto di qualità superiore, q_H. Possiamo identificare i tre gruppi lungo il segmento di lunghezza unitaria che identifica l'intera popolazione dei consumatori:



I punti k e h $(k \geq h)$ separano un gruppo dall'altro, individuano cioè i consumatori indifferenti, rispettivamente, tra acquistare il prodotto di qualità superiore e quello di qualità inferiore (k), e tra acquistare il bene di qualità inferiore e non acquistare affatto (h):

$$h = \frac{p_L}{q_L}; \qquad (3$$

$$k = \frac{p_H - p_L}{q_H - q_L}. \qquad (4$$

Le funzioni di domanda per i due prodotti saranno date da:

$$x_H = (1-k) = \frac{(q_H - q_L) - (p_H - p_L)}{(q_H - q_L)}; \qquad (5$$

$$x_L = (k-h) = \frac{q_L p_H - q_H p_L}{q_L(q_H - q_L)}. \qquad (6$$

Il metodo seguito per individuare la soluzione consiste nel ricercare, procedendo per induzione a ritroso, la soluzione di un programma di ottimo (nel caso di duopolio, l'equilibrio perfetto nel senso di Selten (1965, 1975) del supergioco) in due stadi, il primo dei quali si situa (o viene giocato simultaneamente, nel caso di duopolio) nello spazio delle qualità, mentre il secondo si situa (o viene giocato simultaneamente) in quello dei prezzi. Operativamente, occorrerà quindi individuare la coppia di prezzi ottimale (o che identifica l'equilibrio di Nash) per il secondo stadio, supponendo date le qualità, e successivamente individuare la coppia di qualità ottimale (o che costituisce l'equilibrio di Nash) per il primo stadio del programma (o del gioco). Ricaveremo quindi tali condizioni in termini generali, per procedere poi alla simulazione numerica.

2. Monopolio e pianificazione sociale

L'obiettivo del monopolista che produca entrambi i beni è il seguente:

$$\max_{p_i, q_i} \quad \pi^M = (p_H - q_H^n)x_H + (p_L - q_L^n)x_L. \qquad (7$$

Le condizioni di primo ordine rispetto ai prezzi, relative quindi al secondo e conclusivo stadio del gioco, sono le seguenti:

$$\frac{\delta\pi^M}{\delta p_H} = \frac{q_H^n + q_H - q_L - q_L^n + 2p_L - 2p_H}{q_H - q_L} = 0; \qquad (8$$

$$\frac{\delta\pi^M}{\delta p_L} = \frac{q_L q_H^n - q_L^n q_H + 2p_L q_H - 2p_H q_L}{q_L(q_L - q_H)} = 0. \qquad (9$$

Risolvendole, otteniamo i prezzi di equilibrio, espressi in funzione delle qualità:

$$p_H = \frac{q_H + q_H^n}{2}; \qquad p_L = \frac{q_L + q_L^n}{2}; \qquad (10$$

sostituendoli nella funzione obiettivo e derivandola rispetto alle qualità, otteniamo le condizioni di primo ordine relative allo stadio iniziale del gioco:

$$\frac{\delta\pi^M}{\delta q_H} = \frac{(q_L^n - q_H^n - q_L + q_H)(q_H^n + q_H - q_L + 2nq_L q_H^{n-1} - 2nq_H^n)}{4(q_H - q_L)^2}; \qquad (11$$

$$\frac{\delta\pi^M}{\delta q_L} = \frac{q_H(q_H^{n-1} - q_L^{n-1})(q_L^{n-1}q_H + q_H^n - 2q_L^n + 2nq_L^n - 2nq_L^{n-1}q_H)}{4(q_H - q_L)^2}. \qquad (12$$

Un pianificatore sociale che produca entrambi i beni cercherà invece di massimizzare il benessere, definito come la somma dei profitti e del surplus del consumatore:

$$W = \int_h^k (\theta q_L - q_L^n)d\theta + \int_k^1 (\theta q_H - q_h^n)d\theta. \qquad (13$$

Naturalmente, il pianificatore fisserà i prezzi in corrispondenza dei costi marginali, $p_H = q_H^n, \quad p_L = q_L^n$. Le condizioni di primo ordine rispetto alle qualità sono:

$$\frac{\delta W}{\delta q_H} = \frac{(q_L^n - q_H^n - q_L + q_H)(q_H^n + q_H - q_L + 2nq_L q_H^{n-1} - 2nq_H^n)}{2(q_H - q_L)^2} = 0; \qquad (14$$

$$\frac{\delta W}{\delta q_L} = \frac{q_H(q_H^{n-1} - q_L^{n-1})(q_L^{n-1} q_H + q_H^n - 2q_L^n + 2nq_L^n - 2nq_L^{n-1} q_H)}{2(q_H - q_L)^2} = 0. \qquad (15$$

Come si nota immediatamente, le condizioni (14-15) corrispondono alle (11-12) ottenute nel caso di monopolio privato: è quindi immediato concludere che le qualità di equilibrio saranno le stesse in entrambi i casi. Questo non è un risultato di validità generale, in quanto il monopolista è incentivato a deviare rispetto alle condizioni di ottimo sociale sotto due profili. Il primo consiste nel fatto che manterrà un *markup* al di sopra del costo marginale, ovvero produrrà una quantità inferiore rispetto a quella ottima. Il secondo consiste nel fatto che la qualità offerta per ciascun prodotto potrà essere superiore o inferiore a quella socialmente ottimale a seconda che la valutazione attribuita alla qualità da parte del consumatore medio sia rispettivamente minore o maggiore di quella espressa dal consumatore marginale.[7] Quindi, implicitamente, l'eventuale distorsione qualitativa è legata agli effetti di una variazione della qualità sull'elasticità della domanda rispetto al prezzo: perciò, il problema della scelta qualitativa si traduce nel problema dell'appropriabilità del surplus da parte del monopolista, al variare della qualità. Dal momento che in questo caso, come è facilmente verificabile, le funzioni di domanda (inverse) sono lineari nelle quantità, le qualità sono fissate dal monopolista in corrispondenza dei loro valori ottimali (Spence, 1975, pp.419-22), e, come vedremo, la quota di surplus spettante al monopolista sotto forma di profitti, in termini percentuali, è costante al variare della qualità.

---

7. La questione può essere riformulata nei seguenti termini: la distorsione qualitativa operata dal monopolista è legata al tentativo di discriminare tra i consumatori, ed in particolare al tentativo di costringere i consumatori più ricchi a rinunciare alla maggiore quota possibile del proprio surplus pur di ottenere un bene che li soddisfi sotto il profilo qualitativo (Dupuit, 1849, cit. in Ekelund, 1970, p.275). Questo è il risultato ottenuto da Mussa e Rosen (1978), in cui, mentre il bene di qualità superiore corrisponde all'ottimo sociale, quello inferiore è di qualità subottimale.

3. Duopolio

Nel caso di duopolio, ciascuna impresa ha il seguente obiettivo:

$$\max_{p_i, q_i} \quad \pi_i^D \quad = \quad (p_i - q_i^n)x_i; \tag{16}$$

ovvero, le due imprese dovranno massimizzare i profitti relativi ad un singolo prodotto (naturalmente, dal momento che nel nostro caso il gioco è simultaneo, gli equilibri saranno due, simmetrici):

$$\pi_H^D \quad = \quad \left(1 - \frac{p_H - p_L}{q_H - q_L}\right)(p_H - q_H^n); \tag{17}$$

$$\pi_L^D \quad = \quad \frac{p_H q_L - p_L q_H}{q_L(q_H - q_L)}(p_L - q_L^n). \tag{18}$$

Le condizioni di primo ordine rispetto ai prezzi sono le seguenti:

$$\frac{\delta \pi_H^D}{\delta p_H} \quad = \quad \frac{q_H^n + q_H - q_L + p_L - 2p_H}{q_H - q_L} \quad = \quad 0; \tag{19}$$

$$\frac{\delta \pi_L^D}{\delta p_L} \quad = \quad \frac{q_H q_L^n - 2q_H p_L + q_L p_H}{q_L(q_H - q_L)} \quad = \quad 0. \tag{20}$$

Dalle (19-20) possiamo ricavare i prezzi di equilibrio:

$$p_H \quad = \quad \frac{q_H(q_L^n - 2q_L + 2q_H + 2q_H^n)}{4q_H - q_L}; \tag{21}$$

$$p_L \quad = \quad \frac{q_L q_H - q_L^2 + 2q_H q_L^n - q_L q_H^n}{4q_H - q_L}. \tag{22}$$

Sostituendo tali valori nelle funzioni obiettivo (17-18) e derivando queste ultime rispetto alle qualità, otteniamo le condizioni di primo ordine relative al primo stadio:

$$\frac{\delta\pi_H^D}{\delta q_H} = q_H(q_L^n - 2q_L + 2q_H + q_L q_H^{n-1} - 2q_H^n)(2q_L^{n+2} - 4q_L^3 - 10q_H q_L^2 - q_H q_L^{n+1} - 14q_L q_H^2 - 4q_L^n q_H^2 +$$

$$+8q_H^3 + 5q_L^2 q_H^n - 10q_L q_H^{n+1} + 8q_H^{n+2} + 2nq_L^3 q_H^{n-1} - 14nq_L q_H^n + 28nq_L q_H^{n+1} - 16nq_H^{n+2})$$

$$/((q_H - q_L)^2 (4q_H - q_L)^3) \quad = \quad 0; \qquad (23$$

$$\frac{\delta\pi_L^D}{\delta q_L} \quad = \quad q_H(q_L^2 - q_L^{n+1} - q_H q_L + 2q_H q_L^n - q_L q_H^n)$$

$$(7q_H q_L^3 - 2q_L^{n+3} + 9q_H q_L^{n+2} - 11q_H^2 q_L^2 - 18q_L^{n+1} q_H^2 + 28nq_L^{n+1} q_H^2 - 16nq_L^n q_H^3)$$

$$/(q_L^2 (q_H - q_L)^2 (q_L - 4q_H)^3) \quad = \quad 0. \qquad (24$$

Le condizioni (23-24) completano il quadro necessario per procedere alla simulazione numerica, condotta facendo variare l'esponente n tra 10/9 e 120. La simulazione si è resa necessaria dal momento che l'algoritmo impiegato[8] non è in grado di calcolare le soluzioni dei sistemi formati dalle condizioni di primo ordine (14-15) e (23-24), che avrebbero la seguente forma funzionale:

$$q_i \quad = \quad f(q_j, n). \qquad (25$$

Il problema si sarebbe quindi ridotto allo studio delle funzioni di reazione definite dalle (25), al cui interno avrebbe avuto particolare rilevanza la valutazione dei seguenti limiti:

$$\lim_{n \to 1} q_i; \qquad \lim_{n \to \infty} q_i. \qquad (26$$

I risultati ottenuti attraverso la simulazione, per le grandezze rilevanti, sono esposti nelle sezioni che seguono. Per l'analisi del comportamento asintotico del modello, si rimanda il lettore alla sezione 9.

---

8. Che fa parte del pacchetto *Mathematica*, Wolfram Research Inc..

4. Qualità

La tabella 1 riassume le soluzioni numeriche ottenute per il primo stadio, al variare di *n*. Naturalmente, come abbiamo già sottolineato, le soluzioni relative al caso di pianificazione sociale coincidono con quelle relative al monopolio.

n	q_H^M	q_H^D	q_L^M	q_L^D
10/9	0.2348	0.2348	0.0586	0.0773
9/8	0.2385	0.2387	0.0608	0.0796
8/7	0.2431	0.2436	0.0637	0.0825
7/6	0.2492	0.2501	0.0676	0.0863
6/5	0.2575	0.2588	0.0731	0.0916
5/4	0.2694	0.2715	0.0813	0.0994
4/3	0.2879	0.2913	0.0952	0.1121
3/2	0.3214	0.3269	0.1228	0.1364
2	0.4000	0.4097	0.2000	0.1994
3	0.5032	0.5158	0.3222	0.2915
4	0.5704	0.5827	0.4106	0.3548
5	0.6187	0.6296	0.4768	0.4003
6	0.6556	0.6647	0.5284	0.4338
10	0.7459	0.7483	0.6564	0.4982
11	0.7607	0.7618	0.6773	0.5039
12	0.7736	0.7735	0.6956	0.5074
15	0.8042	0.8021	0.7388	0.5122
20	0.8387	0.8355	0.7872	0.5170
30	0.8786	0.8755	0.8424	0.5260
40	0.9016	0.8989	0.8736	0.5328
50	0.9166	0.9143	0.8938	0.5378
60	0.9274	0.9253	0.9081	0.5415
80	0.9418	0.9402	0.9271	0.5468
100	0.9511	0.9498	0.9392	0.5504
120	0.9577	0.9566	0.9477	0.5530

Tabella 1

Ai nostri fini, è tuttavia più opportuno dare una rappresentazione grafica dell'andamento di tali valori. La figura 1 non è altro che la traduzione grafica della tabella precedente.

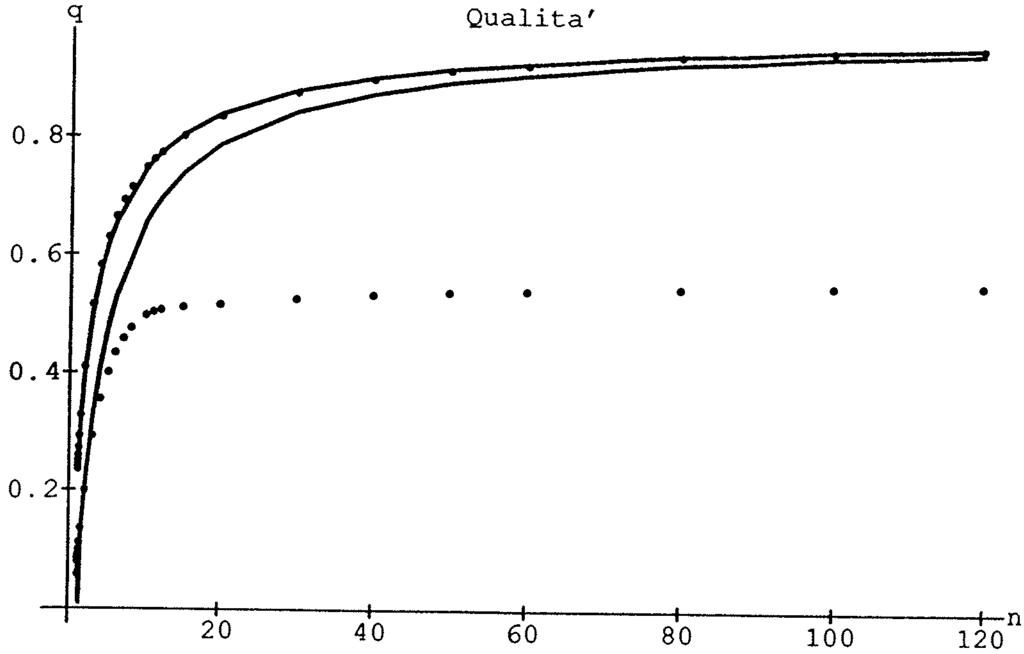


Figura 1

Legenda - linea continua: monopolio; linea discontinua: duopolio

Come si nota immediatamente, le curve mostrano un andamento fortemente asintotico, in cui il tasso di crescita di q_i, che è superiore al 25% nel passaggio da n=2 ad n=3, diminuisce rapidamente per valori di n superiori a 10.[9] Inoltre, il valore asintotico assunto da q_H è pari all'unità. Questo estremo superiore appare quindi generato endogenamente dall'ipotesi relativa alla propensione marginale alla spesa per la qualità, θ, che appartiene all'intervallo [0, 1].

La considerazione più rilevante, tuttavia, è la seguente: per $n \in [2, 11]$ le qualità offerte in duopolio sono entrambe esterne all'intervallo qualitativo offerto in monopolio (sia pubblico che privato). Questo risultato sembra riconducibile al principio di *massima differenziazione*, se tale differenziazione è misurata semplicemente sulla base della *sequenza* in cui vengono ordinati i prodotti offerti: dal momento che i duopolisti devono limitare la concorrenza di prezzo, cercando quindi di evitare il verificarsi del paradosso di Bertrand, essi tenteranno di allontanare il più possibile i propri prodotti l'uno dall'altro. Diversamente si

9. Naturalmente, dal momento che i valori ottenuti sono tutti interni all'intervallo unitario, l'aumento dell'esponente implica che il costo di produzione, in realtà, *diminuisce*.

comporterà il monopolista, il cui obiettivo è quello di realizzare un processo di autoselezione tra i consumatori, discriminandoli attraverso la differenziazione qualitativa.

All'esterno dell'intervallo [2, 11] il principio di massima differenziazione non trova più riscontro: per $n = \frac{3}{2}$, $q_L^D > q_L^M$, mentre per $n = 12$, $q_H^D < q_H^M$. Questo è evidenziato dalle figure 2 e 3.

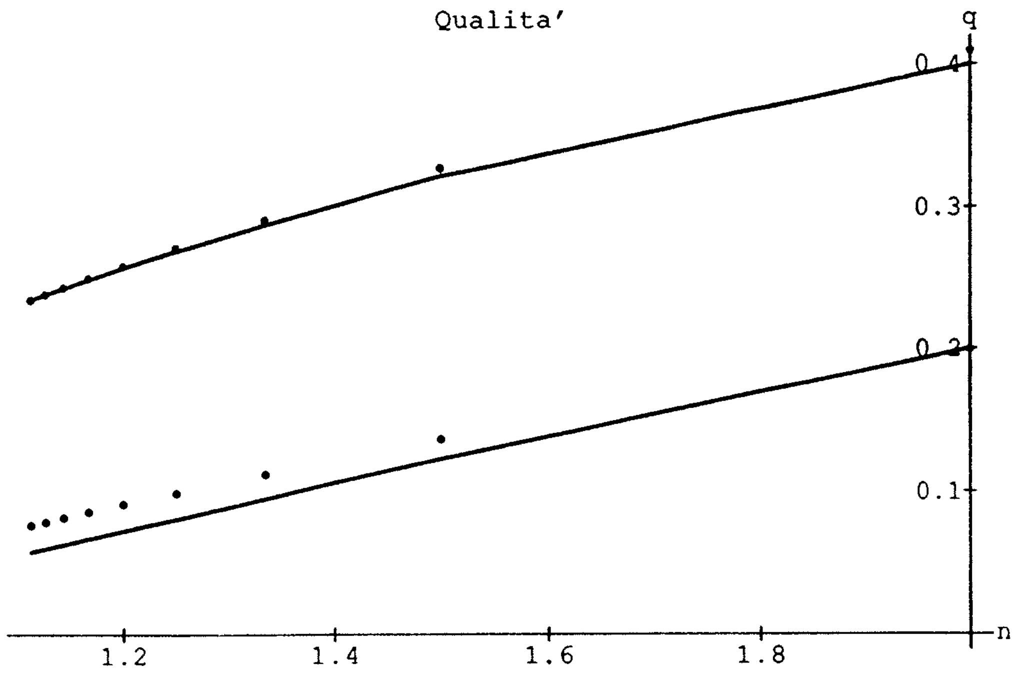


Figura 2

Legenda - linea continua: monopolio; linea discontinua: duopolio

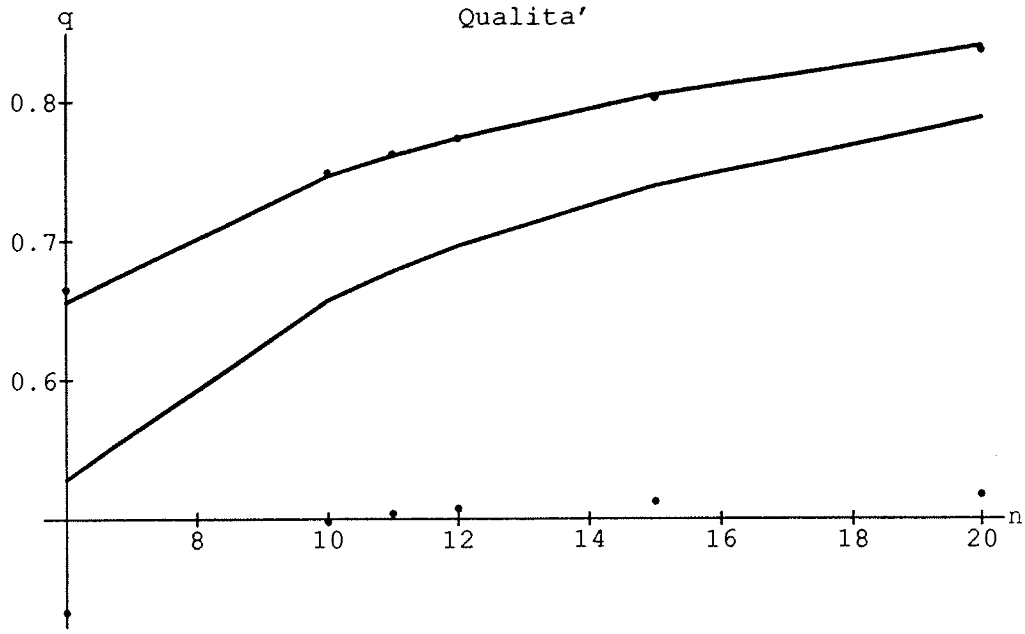


Figura 3

Legenda - linea continua: monopolio; linea discontinua: duopolio

In alternativa, possiamo misurare il grado di differenziazione in termini della distanza che separa q_H^j da q_L^j: sotto questo profilo, siamo portati a concludere che il grado di differenziazione è sempre maggiore in duopolio che in monopolio, e che mentre nella prima configurazione di mercato aumenta all'aumentare di n, nella seconda tende, al contrario, a scomparire. Quest'ultimo comportamento si offre ad un'interpretazione intuitiva: dal momento che $q \in]0, \quad 1[$, all'aumentare di n i costi (sia unitari che totali) tendono a zero, quindi il monopolista (sia pubblico che privato) trova vantaggioso produrre due beni sempre più simili (cfr. sezione 9).

5. Prezzi

La tabella 2 riassume le soluzioni relative allo stadio conclusivo, ovvero i prezzi di equilibrio ricavati al variare di *n*.

n	p_H^M	p_H^D	p_H^{SP}	p_L^M	p_L^D	p_L^{SP}
10/9	0.2173	0.2105	0.1998	0.0507	0.0637	0.0427
9/8	0.2189	0.2114	0.1993	0.0518	0.0642	0.0428
8/7	0.2208	0.2125	0.1986	0.0533	0.0648	0.0429
7/6	0.2234	0.2139	0.1977	0.0554	0.0656	0.0431
6/5	0.2268	0.2157	0.1963	0.0581	0.0665	0.0433
5/4	0.2317	0.2179	0.1940	0.0623	0.0678	0.0434
4/3	0.2390	0.2209	0.1902	0.0693	0.0695	0.0435
3/2	0.2517	0.2247	0.1822	0.0829	0.0720	0.0430
2	0.2800	0.2267	0.1600	0.1200	0.0750	0.0400
3	0.3152	0.2177	0.1274	0.1778	0.0739	0.0334
4	0.3381	0.2070	0.1058	0.2195	0.0700	0.0284
5	0.3546	0.1981	0.0906	0.2507	0.0681	0.0246
6	0.3675	0.1915	0.0793	0.2750	0.0658	0.0217
7		0.1869			0.0640	
10	0.3996	0.1833	0.0533	0.3356	0.0615	0.0148
11	0.4049	0.1846	0.0493	0.3455	0.0613	0.0137
12	0.4097	0.1867	0.0459	0.3542	0.0614	0.0128
15	0.4211	0.1942	0.0380	0.3747	0.0620	0.0107
20	0.4341	0.2046	0.0296	0.3977	0.0633	0.0083
30	0.4496	0.2165	0.0206	0.4241	0.0650	0.0058
40	0.4587	0.2231	0.0158	0.4390	0.0661	0.0045
50	0.4647	0.2274	0.0129	0.4487	0.0668	0.0036
60	0.4691	0.2304	0.0108	0.4556	0.0674	0.0031
80	0.4750	0.2343	0.0083	0.4647	0.0681	0.0023
100	0.4789	0.2369	0.0067	0.4706	0.0686	0.0019
120	0.4816	0.2387	0.0056	0.4746	0.0690	0.0016

Tabella 2

Anche in questo caso, può essere opportuno ricorrere all'esposizione grafica dei risultati:

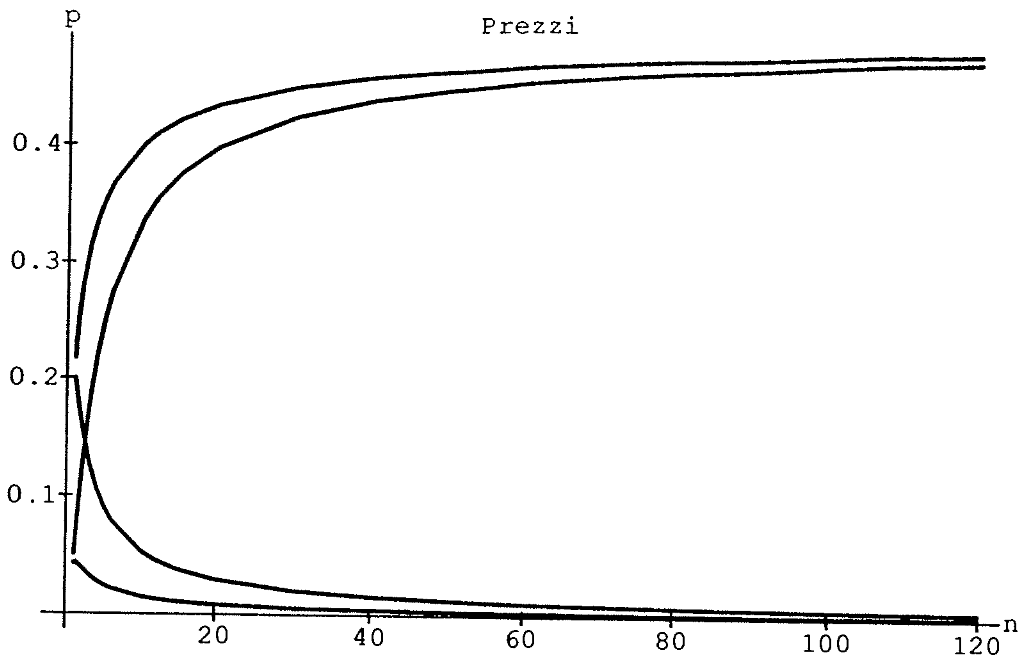


Figura 4 - Prezzi di equilibrio in monopolio privato ed in monopolio pubblico

L'opposto andamento asintotico assunto dai prezzi in regime di monopolio privato e di pianificazione sociale appare evidente, dal momento che nel secondo caso i prezzi dei due prodotti sono fissati in corrispondenza dei relativi costi marginali, e questi ultimi diminuiscono all'aumentare di n.

Non monotono è l'andamento seguito dai prezzi in regime di duopolio: p_H^D aumenta fino ad n=2, diminuisce fino ad n=10,[10] poi aumenta di nuovo assumendo infine un andamento asintotico; p_L^D aumenta fino ad n=2, diminuisce fino ad n=11 per poi aumentare di nuovo in modo asintotico. La figura 5 permette di confrontare tra loro gli andamenti dei prezzi in regime di monopolio e di duopolio: come si nota, mentre $p_H^M > p_H^D$, $\forall n$, per $n \in \left[\frac{10}{9}, \frac{4}{3}\right]$, si ha che $p_L^D > p_L^M$. Il grafico esposto nella figura 6, in cui sono posti a confronto gli andamenti dei prezzi nei casi di duopolio e di pianificazione sociale, è invece di interpretazione più agevole: l'andamento ovunque decrescente dei prezzi praticati in regime di pianificazione sociale è naturalmente da ascriversi al fatto che, all'aumentare dell'esponente, i costi marginali (e quindi i prezzi) di entrambi i prodotti diminuiscono.

---

10. L'esponente n=7 compare solo in alcune delle simulazioni effettuate, in quanto la sua rilevanza, ai fini dell'andamento delle variabili considerate, è appunto limitata a tali casi.

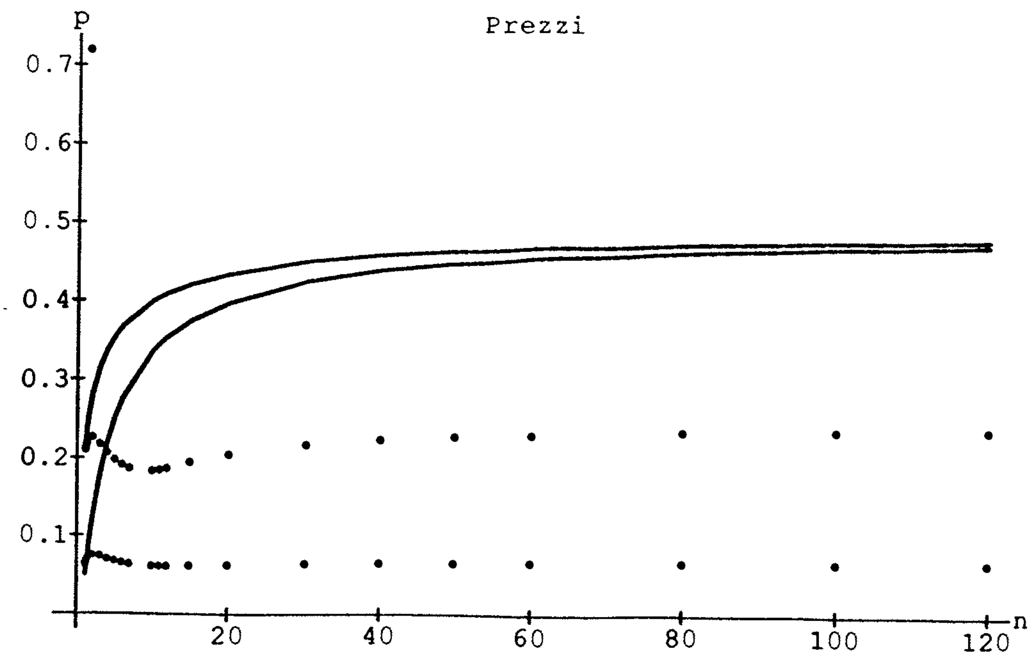


Figura 5 - Prezzi di equilibrio in monopolio privato e in duopolio

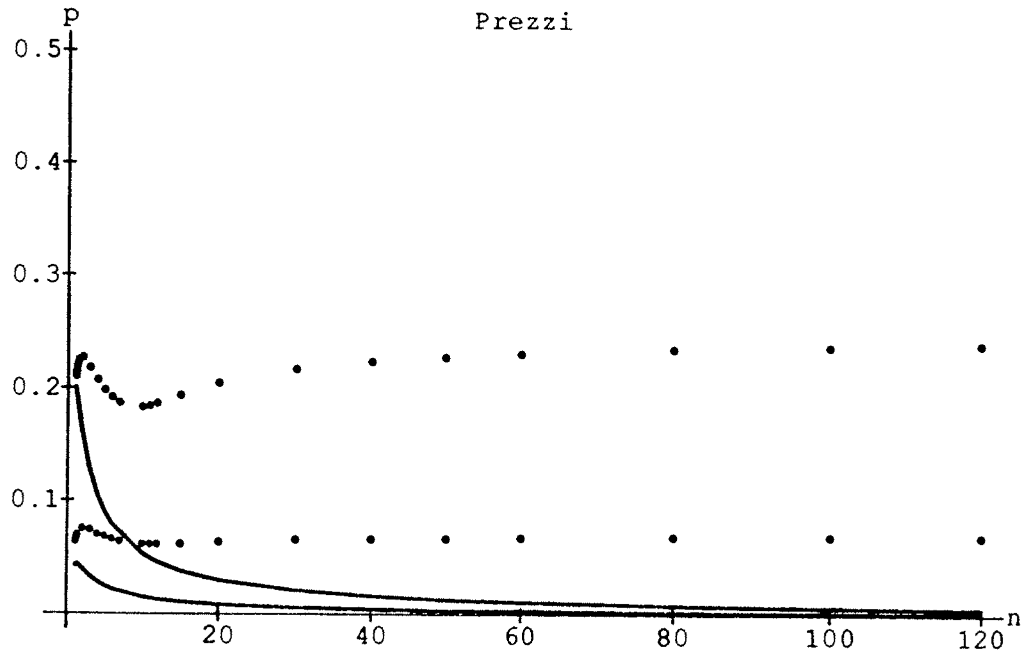


Figura 6 - Prezzi di equilibrio in monopolio pubblico e in duopolio

Legenda - linea continua: monopolio; linea discontinua: duopolio

6. Quantità

La tabella 3 riassume l'andamento delle quantità prodotte, in equilibrio, al variare di n.

n	x_H^M	x_L^M	$x_H^M + x_L^M$	x_H^D	x_L^D	$x_H^D + x_L^D$	x_H^{SP}	x_L^{SP}	$x_H^{SP} + x_L^{SP}$
10/9	0.0541	0.0811	0.1352	0.0678	0.1076	0.1754	0.1083	0.1621	0.2704
9/8	0.0595	0.0881	0.1476	0.0748	0.1178	0.1926	0.1191	0.1762	0.2953
8/7	0.0662	0.0963	0.1625	0.0834	0.1303	0.2137	0.1324	0.1928	0.3252
7/6	0.0745	0.1064	0.1809	0.0943	0.1456	0.2399	0.1490	0.2127	0.3617
6/5	0.0852	0.1185	0.2037	0.1084	0.1650	0.2734	0.1704	0.2370	0.4074
5/4	0.0994	0.1335	0.2329	0.1276	0.1903	0.3179	0.1989	0.2670	0.4659
4/3	0.1195	0.1521	0.2716	0.1552	0.2245	0.3797	0.2390	0.3043	0.5433
3/2	0.1496	0.1751	0.3247	0.1986	0.2729	0.4715	0.2992	0.3503	0.6495
2	0.2000	0.2000	0.4000	0.2790	0.3440	0.6230	0.4000	0.4000	0.8000
3	0.2404	0.2076	0.4480	0.3588	0.3876	0.7464	0.4808	0.4153	0.8961
4	0.2577	0.2076	0.4653	0.4028	0.3971	0.7999	0.5154	0.4152	0.9306
5	0.2673	0.2068	0.4741	0.4328	0.4135	0.8463	0.5347	0.4135	0.9482
6	0.2730	0.2059	0.4789	0.4557	0.3925	0.8482	0.5469	0.4118	0.9587
7				0.4741	0.3682	0.8423			
10	0.2851	0.2036	0.4887	0.5128	0.3637	0.8765	0.5702	0.4072	0.9774
11	0.2866	0.2032	0.4898	0.5217	0.3565	0.8782	0.5732	0.4064	0.9796
12	0.2878	0.2029	0.4907	0.5290	0.3499	0.8789	0.5757	0.4058	0.9815
15	0.2905	0.2022	0.4927	0.5439	0.3349	0.8788	0.5812	0.4044	0.9856
20	0.2933	0.2014	0.4947	0.5563	0.3212	0.8775	0.5865	0.4028	0.9893
30	0.2958	0.2006	0.4964	0.5665	0.3097	0.8762	0.5917	0.4013	0.9930
40	0.2972	0.2002	0.4974	0.5711	0.3047	0.8758	0.5943	0.4005	0.9948
50	0.2979	0.1999	0.4978	0.5737	0.3019	0.8756	0.5959	0.3999	0.9958
60	0.2985	0.1998	0.4983	0.5754	0.3001	0.8755	0.5969	0.3996	0.9965
80	0.2991	0.1996	0.4987	0.5775	0.2979	0.8754	0.5982	0.3992	0.9974
100	0.2995	0.1995	0.4990	0.5787	0.2966	0.8753	0.5990	0.3989	0.9979
120	0.2997	0.1994	0.4991	0.5795	0.2957	0.8752	0.5995	0.3988	0.9983

Tabella 3

Le figure 7-10 espongono i medesimi risultati per via grafica:

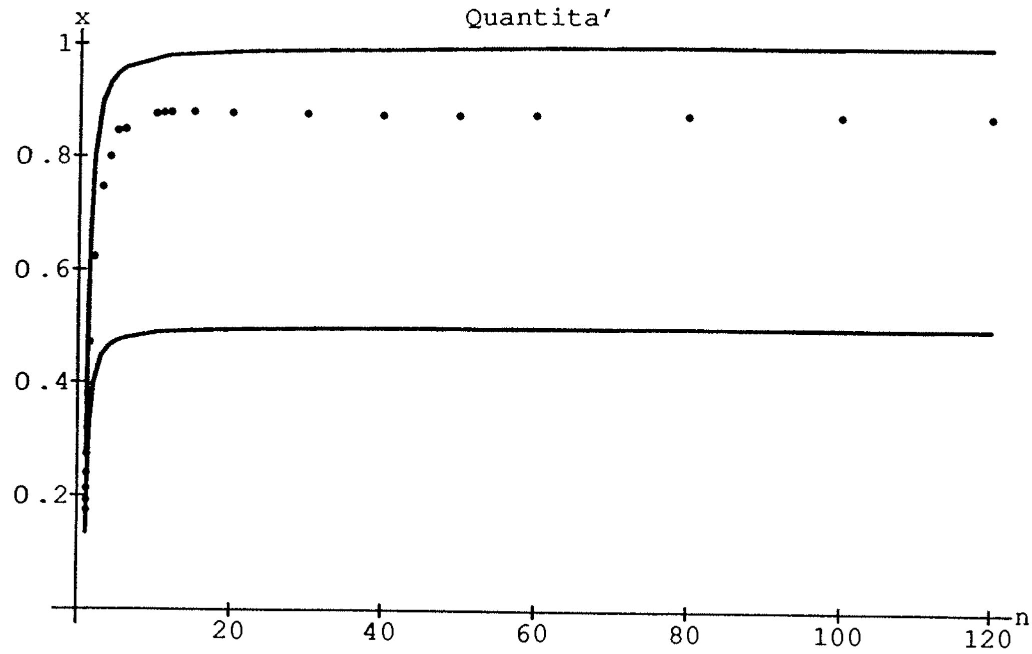


Figura 7 - Quantità complessive

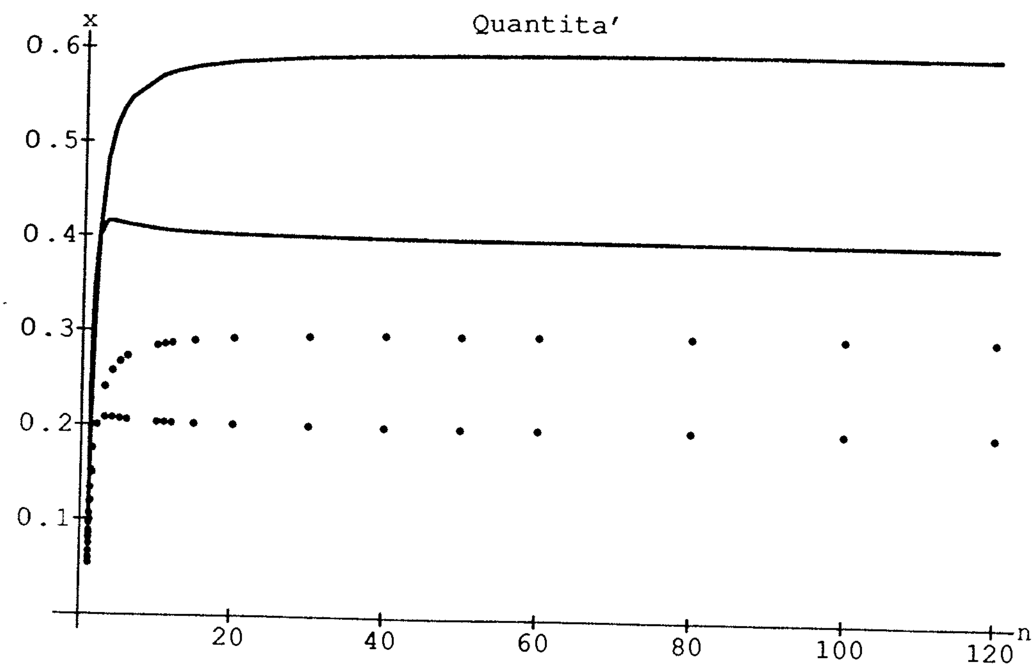


Figura 8 - Monopolio *vs* pianificazione sociale

Legenda - linea continua: monopolio; linea discontinua: duopolio

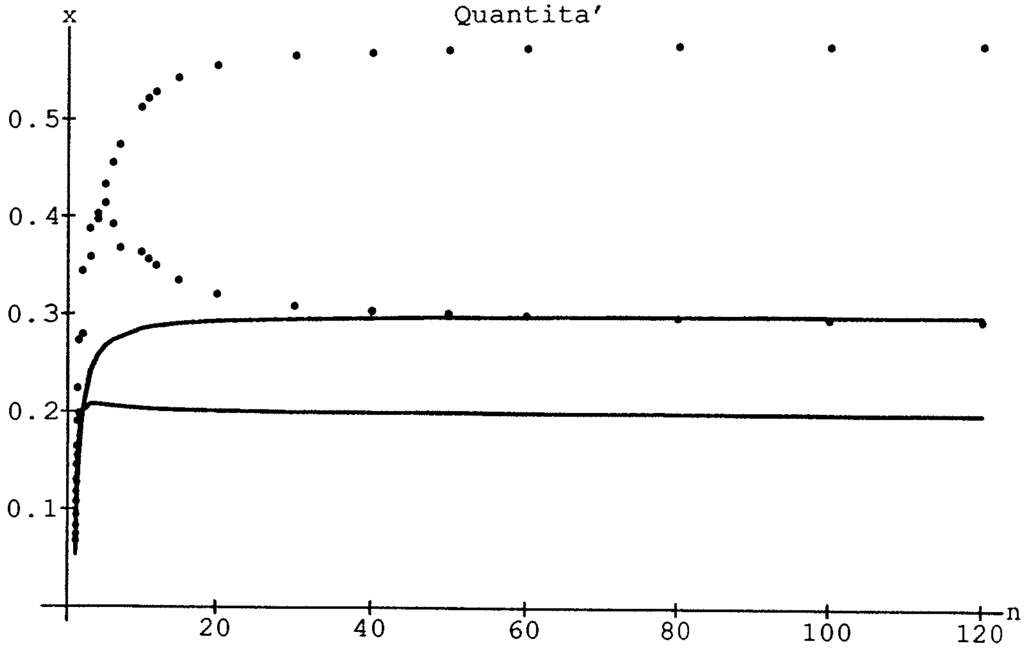


Figura 9 - Monopolio *vs* duopolio

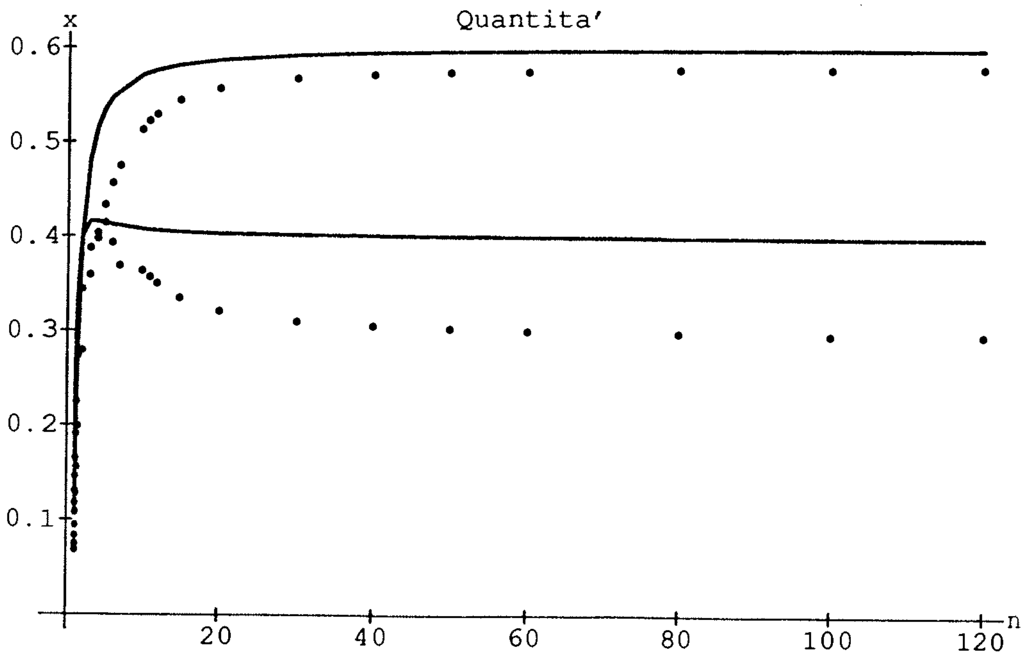


Figura 10 - Duopolio *vs* pianificazione sociale

Legenda - linea continua: monopolio; linea discontinua: duopolio

Come risulta dai grafici, tutte le curve hanno andamento asintotico. Tuttavia, $x_H^M < x_L^M$ per n<2; inoltre, x_L^M cresce al crescere di n, fino ad n=3, per poi diminuire. Per quanto riguarda il duopolio, $x_H^D < x_L^D$ per $n \leq 3$; inoltre, x_L^D cresce fino a n=5, per poi diminuire. Infine, per quanto riguarda il regime di pianificazione sociale, $x_H^{SP} < x_L^{SP}$ per n<2; come accade in regime di monopolio, in corrispondenza di quest'ultimo valore dell'esponente le quantità relative ai due prodotti sono le stesse. Inoltre, x_L^{SP} aumenta fini a n=3, per poi diminuire. Per quanto riguarda le quantità complessivamente offerte in corrispondenza delle tre forme di mercato, vale la disequazione $(x_H^{SP} + x_L^{SP}) > (x_H^D + x_L^D) > (x_H^M + x_L^M)$, per qualsiasi valore di n; tuttavia, a differenza delle quantità complessivamente prodotte in regime di monopolio e di pianificazione sociale, $(x_H^D + x_L^D)$ non mostra un andamento monotono crescente al variare dell'esponente, anche se la distorsione evidenziata rispetto al caso di pianificazione sociale appare ovunque contenuta, non superando mai il 35% (nel caso del monopolio tale distorsione si mantiene invece intorno al 50%).

7. Profitti

La tabella 4 mostra l'andamento dei profitti al crescere di n. Naturalmente, non vi compare il caso di pianificazione sociale, in quanto la norma che regola la fissazione dei prezzi in tale forma di mercato è $p_i = cm_i$.

n	π^M	π_H^D	π_L^D	$\pi_H^D + \pi_L^D$
10/9	0.0016	0.0007	0.0006	0.0013
9/8	0.0019	0.0009	0.0007	0.0016
8/7	0.0024	0.0011	0.0009	0.0020
7/6	0.0032	0.0015	0.0012	0.0027
6/5	0.0044	0.0020	0.0016	0.0036
5/4	0.0063	0.0028	0.0023	0.0051
4/3	0.0098	0.0043	0.0035	0.0078
3/2	0.0174	0.0075	0.0059	0.0134
2	0.0400	0.0164	0.0121	0.0285
3	0.0751	0.0288	0.0190	0.0478
4	0.0955	0.0369	0.0218	0.0587
5	0.1173	0.0429	0.0229	0.0658
6	0.1309	0.0479	0.0232	0.0711
7		0.0525	0.0231	0.0756
10	0.1640	0.0658	0.0220	0.0878
11	0.1693	0.0702	0.0216	0.0918
12	0.1740	0.0745	0.0214	0.0959
15	0.1849	0.0857	0.0208	0.1065
20	0.1971	0.0985	0.0203	0.1188
30	0.2108	0.1122	0.0202	0.1324
40	0.2186	0.1194	0.0202	0.1396
50	0.2237	0.1239	0.0202	0.1441
60	0.2272	0.1271	0.0202	0.1473
80	0.2319	0.1312	0.0203	0.1515
100	0.2349	0.1337	0.0203	0.1540
120	0.2370	0.1355	0.0204	0.1559

Tabella 4

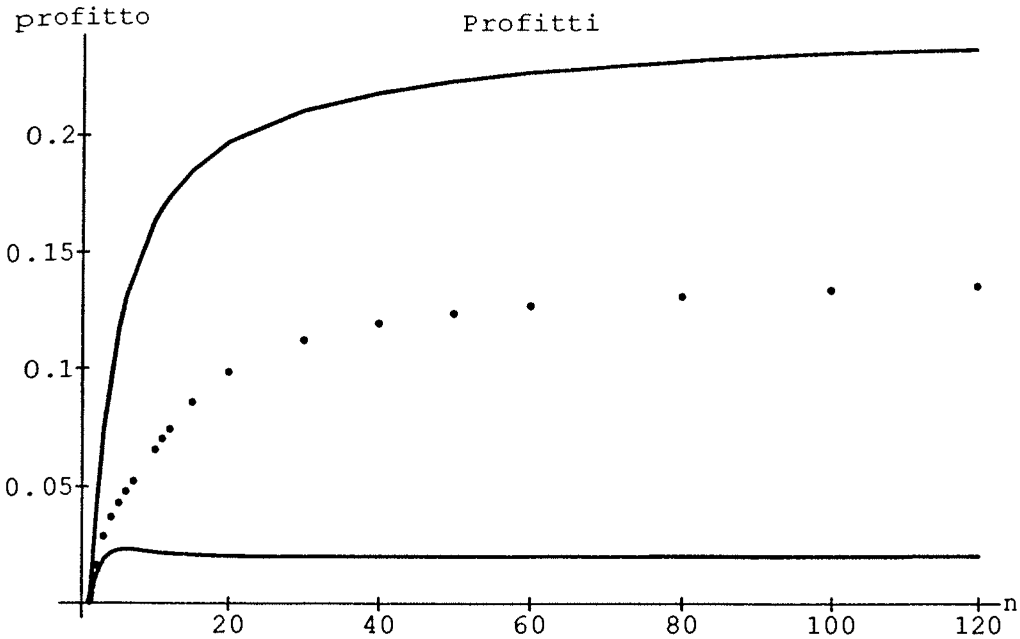


Figura 11

Legenda - linea continua alta: π^M; linea discontinua: π_H^D; linea continua bassa: π_L^D.

Come si evince da un semplice esame dei dati riportati in tabella e dall'andamento delle curve tracciate nella figura 11, $\pi^M > \pi_H^D + \pi_L^D$ per qualsiasi valore di n, come era logico attendersi, ma il rapporto tra i profitti globalmente spettanti ai duopolisti e quelli spettanti al monopolista non è costante, toccando un minimo per n=10, in corrispondenza del quale tale rapporto è pari al 0.503. Per quanto riguarda i profitti dei duopolisti, considerati singolarmente, notiamo che $\pi_H^D > \pi_L^D$ per qualsiasi n, e questo implica che, se uno dei produttori fosse in possesso di un vantaggio *à la Stackelberg* riguardo la scelta della qualità, sceglierebbe senza dubbio di produrre il bene *H*. Inoltre, mentre π_H^D è ovunque crescente, π_L^D aumenta fino ad n=6, per poi diminuire e stabilizzarsi, per $n \geq 20$, intorno a 0.0203.[11]

11. Naturalmente, è possibile interpretare i profitti di monopolio come i profitti derivanti da un accordo di collusione tra i duopolisti, ipotizzando, ai fini di un'equa ripartizione dei profitti congiunti, l'utilizzazione degli stessi *pesi* evidenziati dai singoli profitti realizzati nella situazione non cooperativa. Il vantaggio derivante dalla collusione risulta quindi immediatamente evidente.

8. Benessere

La tabella 5 riassume l'andamento del benessere al variare di n, per le tre forme di mercato.

n	W^M	W^D	W^{SP}
10/9	0.0024	0.0032	0.0032
9/8	0.0029	0.0035	0.0039
8/7	0.0037	0.0044	0.0049
7/6	0.0048	0.0059	0.0064
6/5	0.0066	0.0080	0.0087
5/4	0.0094	0.0115	0.0126
4/3	0.0147	0.0180	0.0196
3/2	0.0260	0.0323	0.0348
2	0.0600	0.0756	0.0800
3	0.1127	0.1435	0.1503
4	0.1493	0.1908	0.1991
5	0.1760	0.2252	0.2346
6	0.1964	0.2512	0.2619
10	0.2460	0.3121	0.3281
11	0.2540	0.3213	0.3387
12	0.2610	0.3291	0.3480
15	0.2774	0.3472	0.3698
20	0.2956	0.3672	0.3941
30	0.3163	0.3904	0.4217
40	0.3279	0.4036	0.4372
50	0.3355	0.4123	0.4473
60	0.3408	0.4184	0.4544
80	0.3479	0.4266	0.4638
100	0.3524	0.4318	0.4698
120	0.3555	0.4355	0.4741

Tabella 5

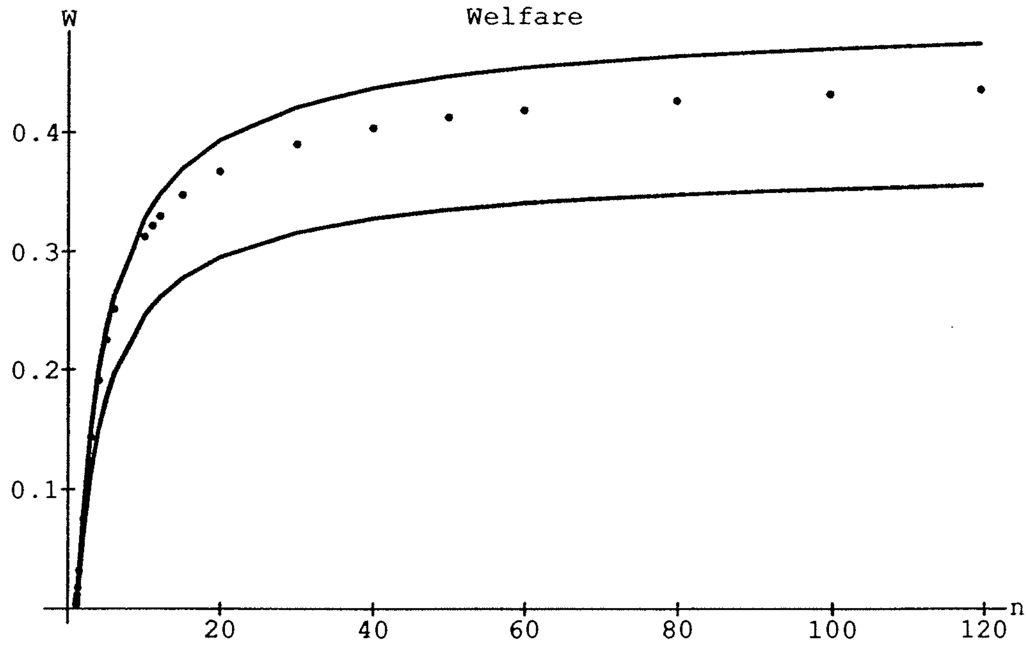


Figura 12

Legenda - linea continua alta: W^{SP}; linea discontinua: W^{D}; linea continua bassa: W^{M}.

L'andamento del benessere è ovunque crescente per le tre forme di mercato, ed è fortemente asintotico. Il dato più notevole che possiamo immediatamente sottolineare è che, come nel caso delle quantità prodotte, anche qui la distorsione associata al duopolio è estremamente contenuta, per qualsiasi valore dell'esponente, e raggiunge il valore minimo, pari al 4.1% di W^{SP}, in corrispondenza di n=6.

Inoltre, confrontando tra loro le tabelle relative ai profitti ed al benessere, possiamo notare che il rapporto π^M/W^M si mantiene pressochè costante, in corrispondenza di un valore pari al 0.67, al variare di n, e lo stesso accade al rapporto π^M/W^{SP}, che non si discosta significativamente da 0.50, ed al rapporto W^M/W^{SP}, pari a 0.75. Questi risultati, in cui la variazione dell'esponente pare spogliata di qualsiasi importanza, sono dovuti esclusivamente alla linearità delle funzioni di domanda, come abbiamo già sottolineato al termine della sezione 2.[12]

9. Risultati asintotici

E' possibile studiare il comportamento asintotico del modello rilevando che, dal momento che $q \in]0, 1[$, avremo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c}{x} = 0.$$

Di conseguenza, è possibile ridefinire le diverse funzioni obiettivo semplicemente ponendo i costi unitari pari a zero. L'obiettivo del monopolista privato diventa quindi:

$$\max_{p_i, q_i} \quad \pi^M \quad = \quad p_H x_H + p_L x_L. \qquad (7'$$

Le condizioni di primo ordine rispetto ai prezzi sono le seguenti:

---

12. Ciò che risulta determinante, ancora una volta, è l'influenza esercitata sull'elasticità della domanda da variazioni nella qualità. Definiamo:

$$\overline{W}(q) = \max_x W(q,x),$$

$$\overline{\pi}(q) = \max_x \pi(q,x)$$

e

$$\beta(q) = \frac{\overline{\pi}(q)}{\overline{W}(q)}.$$

Per capire se la qualità offerta dal monopolista è subottimale (o il contrario), è quindi sufficiente valutare l'inclinazione di $\beta(q)$. La derivata logaritmica dell'espressione precedente è:

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\overline{\pi}'}{\overline{\pi}} - \frac{\overline{W}'}{\overline{W}};$$

quindi, affinchè $\overline{\pi}' = 0$, condizione che individua l'ottimo del monopolista, dovrà aversi $\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{\overline{W}'}{\overline{W}}$; di conseguenza, il monopolista offrirà un bene di qualità subottimale se $\beta' < 0$, e viceversa. Ma, dal momento che, per funzioni di domanda lineari nelle quantità, è possibile mostrare che $\beta = 1/2$, allora $\overline{W}' = 0$ se e solo se $\overline{\pi}' = 0$, quindi non vi sarà alcuna distorsione qualitativa (Spence, 1975, pp.421-2). L'argomentazione di Spence, riferita al caso di un singolo prodotto, è qui estesa a quello di prodotti differenziati.

$$\frac{\delta\pi^M}{\delta p_H} = \frac{q_H - q_L + 2p_L - 2p_H}{q_H - q_L} = 0; \qquad (8'$$

$$\frac{\delta\pi^M}{\delta p_L} = \frac{2(p_L q_H - p_H q_L)}{q_L(q_L - q_H)} = 0. \qquad (9'$$

I prezzi di equilibrio sono:

$$p_H = \frac{q_H}{2}; \qquad p_L = \frac{q_L}{2}; \qquad (10'$$

sostituendo questi valori nella funzione obiettivo (7'), otteniamo:

$$\pi^M = \frac{q_H}{4}. \qquad (7''$$

Questo significa che, essendo q_H limitata superiormente ad uno, la (7") assume il proprio maaggiorante esattamente in corrispondenza di tale valore della qualità, ed inoltre $q_H^M = q_L^M = 1 - \varepsilon$, con ε positivo e piccolo a piacere, cioè il monopolista sta offrendo un unico prodotto di qualità massima, ad un prezzo pari a 0.5, ed in quantità pari a 0.5, conseguendo un profitto pari a 0.25, mentre il livello del benessere è 0.375. E' interessante notare che, in corrispondenza dell'estremo superiore dello spettro qualitativo, la derivata della (7") rispetto alla qualità è positiva: questo implica che il profitto non viene massimizzato, e che il monopolista deve 'accontentarsi', perchè non può aumentare oltre la qualità del proprio prodotto. Analogo risultato emerge nel caso del pianificatore sociale, il cui obiettivo è:

$$W = \int_h^k (\theta q_L) d\theta + \int_k^1 (\theta q_H) d\theta. \qquad (13'$$

Ponendo p_H=p_L=0, otteniamo:

$$W = \frac{q_H}{2}; \qquad (13''$$

quindi, nemmeno il benessere risulta massimizzato, in quanto la derivata della (13") rispetto alla qualità è positiva; il limite asintotico è, ovviamente, 0.5, e viene raggiunto quando $q_H^{SP} = q_L^{SP} = 1 - \varepsilon$. La quantità prodotta è pari ad uno, quindi il mercato è coperto.

Le funzioni obiettivo dei duopolisti vanno riscritte come segue:

$$\pi_H^D = \left(1 - \frac{p_H - p_L}{q_H - q_L}\right) p_H; \qquad \text{(17'}$$

$$\pi_L^D = \frac{(p_H q_L - p_L q_H)}{q_L(q_H - q_L)} p_L. \qquad \text{(18'}$$

Le condizioni di primo ordine rispetto ai prezzi sono le seguenti:

$$\frac{\delta \pi_H^D}{\delta p_H} = \frac{q_H - q_L + p_L - 2p_H}{q_H - q_L} = 0; \qquad \text{(19'}$$

$$\frac{\delta \pi_L^D}{\delta p_L} = \frac{q_L p_H - 2q_H p_L}{q_L(q_H - q_L)} = 0. \qquad \text{(20'}$$

Dalle (19'-20') ricaviamo i prezzi di equilibrio:

$$p_H = \frac{2q_H(q_H - q_L)}{4q_H - q_L}; \qquad \text{(21'}$$

$$p_L = \frac{q_L(q_H - q_L)}{4q_H - q_L}. \qquad \text{(22'}$$

Sostituendo tali espressioni nelle (17'-18') e derivando queste ultime rispetto alle qualità, otteniamo:

$$\frac{\delta \pi_L^H}{\delta q_H} = \frac{4q_H(3q_H q_L - 4q_H^2 - 2q_L^2)}{(q_L - 4q_H)^3} = 0; \qquad \text{(23'}$$

$$\frac{\delta\pi_L^D}{\delta q_L} = \frac{q_H^2(7q_L - 4q_H)}{(q_L - 4q_H)^3} = 0. \qquad (24'$$

La soluzione della (24') è data da $q_H^D = 1 - \varepsilon, q_L^D = 4/7q_H^D \tilde{=} 0.5714$, ma per questi valori la (24') non è soddisfatta, ed in particolare tale derivata risulta positiva. Anche in questo caso, quindi, si riproduce il risultato già osservato in monopolio: il profitto associato al prodotto di qualità superiore è limitato superiormente perchè lo è la qualità stessa. I valori asintotici dei profitti sono $\pi_H^D = 7/48 = 0.1458$, $\pi_L^D = 1/48 = 0.0208$, e $\pi_H^D + \pi_L^D = 1/6 = 0.1667$. Quelli relativi ai prezzi sono $p_H^D = 1/4 = 0.25$ e $p_L^D = 1/14 = 0.0714$, mentre quelli relativi alle quantità prodotte sono $x_H^D = 0.6$ e $x_L^D = 0.3$.[13] Infine, il livello del benessere è W^D=0.4583. Come si nota immediatamente, la distorsione indotta nel livello del benessere e nella quantità complessivamente prodotta è limitata.[14]

10. Valutazione dei risultati e suggerimenti per ulteriori sviluppi

Sulla base dei risultati forniti dalla simulazione, e in particolare di quelli relativi al rapporto tra curvatura della funzione di costo, profitti e benessere, possiamo formulare alcune interessanti considerazioni.

Supponiamo, in via preliminare, che i produttori abbiano accesso ad una sorta di *menu tecnologico*, rappresentato semplicemente dalla variazione dell'esponente, e che **entrambi** i beni debbano essere prodotti utilizzando la medesima tecnologia.

Per quanto riguarda il pianificatore sociale, è evidente che, posto di fronte a tale *menu*, sceglierebbe il più alto esponente possibile,[15] in quanto il suo obiettivo è la massimizzazione del benessere che, come abbiamo visto, è ovunque crescente in n.

---

13. I risultati che abbiamo appena esposto sono stati ottenuti anche da Choi e Shin (1992), semplicemente *assumendo* costi di produzione nulli. Questi autori propongono il modello da essi analizzato come una semplice estensione di quello esposto da Tirole (1988, p.295 e seguenti). Alla luce dell'analisi che abbiamo condotto, appare più appropriato considerare tale modello come il limite asintotico di un modello più generale, caratterizzato da una funzione di costo convessa in q.

14. Se, in equilibrio, i duopolisti non coprono il mercato, ciò è semplicemente dovuto al fatto che il minimo valore di θ è 0, e quindi, dal momento che $p_L/q_L > 0$, sia in monopolio privato che in duopolio privato vi sarà sempre almeno un consumatore che non effettua alcun acquisto. L'unica configurazione di mercato in cui tutti i consumatori sono in grado di acquistare almeno uno dei due prodotti è la pianificazione sociale.

15. E quindi cercherebbe di collocarsi in una regione della funzione dei costi unitari caratterizzata dalla maggiore curvatura possibile (cfr. appendice).

Lo stesso ragionamento vale anche nel caso del monopolista, in quanto la sua funzione di profitto è ovunque crescente in n.

Diverso è invece il caso del duopolio, in cui abbiamo verificato che π_L^D aumenta fino ad n=6, per poi diminuire e stabilizzarsi a partire da n=20. Quindi l'ordinamento delle preferenze delle due imprese riguardo la scelta della tecnologia non potrà essere **unanime**: necessariamente, il duopolista che produce il bene di qualità bassa opterebbe per n=6, mentre l'altro preferirebbe aumentare il più possibile l'esponente, in quanto π_H^D è ovunque crescente in n. Una possibile soluzione potrebbe essere rappresentata dall'introduzione di un pagamento collaterale pari a $\pi_L^D(n=6)-\pi_L^D(n^*)$, dove n^* è l'esponente scelto dal duopolista che produce il bene di qualità superiore.

Un'altra soluzione, sempre nell'ipotesi che entrambi debbano impiegare la stessa tecnologia, è la seguente. Il modello che abbiamo adottato, essendo simultaneo, genera in realtà due equilibri simmetrici, in cui l'una o l'altra delle due imprese produrrà il bene più profittevole, cioè quello di qualità alta. Se invece immaginiamo che una delle due abbia un vantaggio di Stackelberg, sarà certamente questa a collocarsi in q_H, e l'equilibrio sarà unico. Analogamente, se immaginiamo di estendere tale vantaggio anche alla scelta tecnologica,[16] allora l'impresa che ne è in possesso potrà, in condizioni di informazione perfetta e completa, scegliere la tecnologia che le appare più vantaggiosa. Naturalmente, è possibile immaginare che tali vantaggi spettino entrambi alla stessa impresa oppure che spettino alternativamente all'una e all'altra. In altre parole, possiamo concepire un gioco che sia rigorosamente simultaneo solo in quella che è definibile come *fase di mercato*. Non solo: è possibile immaginare anche che una delle due imprese sia chiamata a scegliere nello stadio tecnologico, **senza sapere** a chi spetterà la *leadership* nello stadio successivo; la scelta della tecnologia diventa quindi estremamente rischiosa, dal momento che tale impresa non può essere certa di concretizzare il vantaggio attuale attraverso la scelta del proprio prodotto nella fase successiva.

Oltrechè come *menu tecnologico*, la variazione della curvatura della funzione di costo attraverso la variazione di n può essere quindi considerata come la conseguenza di un processo di innovazione tecnologica, consentendo così di avanzare alcune semplici considerazioni riguardo la cosiddetta *ipotesi schumpeteriana*, secondo la quale un alto grado di concentrazione favorirebbe la spesa in R&D e quindi la corsa all'innovazione.

Avendo adottato l'ipotesi che entrambi i prodotti siano il risultato della stessa tecnologia,

---

16. Possiamo immaginarlo come lo stadio iniziale del gioco. In tal modo, l'equilibrio che cerchiamo è l'equilibrio perfetto nei sottogiochi di un gioco a tre stadi, nel primo (e, eventualmente, nel secondo) dei quali una delle due imprese gode di un vantaggio di Stackelberg.

dobbiamo limitarci a valutare l'incentivo ad innovare in questi termini: il duopolista che innova si arroga il diritto di produrre il bene più profittevole, cioè quello di qualità alta.[17] Sotto questo assunto, da una rapida ispezione della tabella 4 e della figura 11 si evince (come del resto era ovvio attendersi) che il monopolista ha sempre un incentivo maggiore di qualsiasi duopolista, perchè la somma dei profitti di duopolio è sempre inferiore ai profitti di monopolio.[18] Questo può non essere vero in termini relativi, in quanto lungo il tratto iniziale delle curve $\frac{\delta\pi^M}{\delta n} \geq \frac{\delta\pi_i^D}{\delta n}$, $\forall i$, e quindi anche l'incentivo misurato in termini *relativi* è a favore del monopolista, mentre quando le curve si avvicinano ai propri asintoti orizzontali il segno della precedente disequazione si inverte, e l'incentivo *relativo* è maggiore per il duopolista che produce q_H, rispetto al monopolista che produce entrambi i beni.

Non solo: come abbiamo già sottolineato, essendo π^M monotono in n, il monopolista cercherà sempre di aumentare l'esponente; dal momento che in questo particolare modello il monopolio e la pianificazione sociale offrono lo stesso spettro di prodotti, potremmo concludere, paradossalmente, che la spesa in R&D effettuata dal monopolista per aumentare la curvatura della propria tecnologia è quella socialmente ottimale, anche se non massimizzerà mai il benessere!

Inoltre, la variazione di n può essere concepita come un'innovazione sotto due aspetti, sia di *processo* (ex ante) che, soprattutto di *prodotto* (ex post): di processo, dal momento che al variare di n varia la curvatura della funzione di costo;[19] di prodotto, dal momento che al variare di n varia la qualità dei prodotti offerti in equilibrio. Di conseguenza, l'introduzione di un'ulteriore stadio in cui le imprese competano in R&D all'interno di un modello analogo a questo potrebbe consentire di analizzare le conseguenze generate da un'innovazione di prodotto e da un'innvovazione di processo *congiuntamente*.

E' peraltro possibile (ed auspicabile) rimuovere l'ipotesi secondo cui entrambi i beni sono prodotti impiegando la medesima tecnologia: l'adozione di due tecnologie caratterizzate da un diverso esponente (cioè da una diversa curvatura) genererà soluzioni necessariamente

---

17. Questo equivale ad escludere la possibilità di proteggere l'innovazione attraverso un brevetto, introducendo però come premio all'innovazione la possibilità di collocarsi nella nicchia di mercato più profittevole.

18. Questo ricalca il risultato ottenuto da Gilbert e Newbery (1982) nel caso di un prodotto omogeneo.

19. In particolare, al crescere di n le curve di costo si abbassano: si rammenti che ci troviamo all'interno dell'intervallo unitario, e quindi l'innovazione tenderà a far *aumentare* l'esponente.

diverse da quelle che abbiamo appena esposto.[20] D'altra parte, è esattamente in un contesto come questo che la corsa all'innovazione assumerebbe il suo significato più pieno.

Infine, un'ulteriore estensione riguarda il caso di un duopolio misto, in cui una delle due imprese sia pubblica, ed abbia quindi come obiettivo la massimizzazione del benessere, controllando tuttavia le variabili relative ad uno solo dei due prodotti. Questo caso è stato analizzato, per n=2, da Delbono, Denicolò e Scarpa (1991).

Conclusioni

L'analisi che abbiamo condotto mirava a chiarire la natura del legame tra curvatura della tecnologia e qualità del prodotto, all'interno di un modello di differenziazione verticale, e le conseguenze della variazione di tale curvatura sulle grandezze rilevanti, cioè prezzi, profitti, quantità prodotte e benessere, in tre diverse configurazioni di mercato: monopolio, duopolio e pianificazione sociale. Nell'ipotesi che i costi siano convessi rispetto alla qualità del prodotto, $c = q^n x$, la variazione della curvatura viene indotta dalla variazione di n; in particolare, la curvatura aumenta all'aumentare dell'esponente.

La simulazione consente di ottenere alcuni interessanti risultati. In primo luogo, la sequenza dei prodotti offerti in equilibrio in monopolio ed in duopolio varia al variare dell'esponente: in particolare, per $n \in [2, 11]$, lo spettro qualitativo offerto dai duopolisti è più ampio di quello offerto dal monopolista (sia pubblico che privato). In secondo luogo, l'andamento del benessere è monotono crescente in n, per le tutte le forme di mercato, così come l'andamento dei profitti di monopolio. Questo induce a concludere che l'aumento dell'esponente e quindi della curvatura che caratterizza la tecnologia, quando tutte le grandezze rilevanti giacciono all'interno dell'intervallo unitario, risulti desiderabile sia da parte del monopolista (pubblico o privato) sia da parte dei consumatori (questo sia detto con la cautela del caso, non avendo in alcun modo specificato la funzione di utilità che caratterizza questi ultimi: tutto ciò che possiamo dire è che all'aumentare della curvatura della tecnologia,

20. Cfr. Itoh (1983, p.102-3). L'autore si limita ad analizzare il caso di una diminuzione dei costi di produzione di un bene di bassa qualità, nell'ambito di un monopolio verticalmente differenziato, e conclude che questo si traduce in un aumento dei prezzi di tutti i beni di qualità superiore a quello i cui costi di produzione sono diminuiti, se la funzione

$$H(\theta_i) = \left[\int_{\theta_i}^{1} f(s)ds \right] / f(\theta_i),$$

che rappresenta il rapporto tra il numero di consumatori il cui θ è maggiore di θ_i e la densità dei consumatori in corrispondenza di θ_i, è convessa.

aumenta il benessere ed aumenta la qualità di entrambi i prodotti offerti). Considerazioni diverse emergono in regime di duopolio, in cui la non monotonicità del profitto spettante al duopolista che offre il prodotto di qualità inferiore implica preferenze conflittuali tra i duopolisti e tra questi e i consumatori riguardo la scelta della tecnologia.

Questo tipo di analisi apre infine interessanti prospettive nel campo dei modelli di R&D, introducendo la possibilità di considerare un'innovazione tecnologica che sia nello stesso tempo di processo e di prodotto.

Appendice: curvatura della funzione di costo

La scelta del concetto di curvatura ha motivazioni ben precise. In alternativa, intuitivamente, avremmo potuto fare riferimento al più familiare concetto di convessità, analizzando l'andamento di $\frac{\delta c_{qq}}{\delta n}$ e $\frac{\delta c_{nn}}{\delta q}$, dove $c_{qq} = \frac{\delta^2 c}{\delta q^2}$ e $c_{nn} = \frac{\delta^2 c}{\delta n^2}$; la scelta, oltrechè da ragioni di

rigore formale, è stata dettata dal fatto che, a nostro avviso, il concetto di curvatura possiede un risvolto intuitivo che ne facilita la comprensione e, nello stesso tempo, agevola l'interpretazione di ciò che accade nel corso della simulazione in quanto tale grandezza, come ci accingiamo a verificare, aumenta all'aumentare di n e fornisce quindi quello che potremmo definire un indicatore monotono di ciò che accade al crescere dell'esponente.

Dal momento che la funzione di costo è definita come $c = q^n x$, al variare dell'esponente la simulazione ci conduce attraverso una famiglia di superfici, ognuna delle quali è definita dalla funzione del costo unitario $cu = q^n$. La figura A1 rappresenta tale funzione (o, se si preferisce, la funzione di costo totale che si ottiene per x=1).

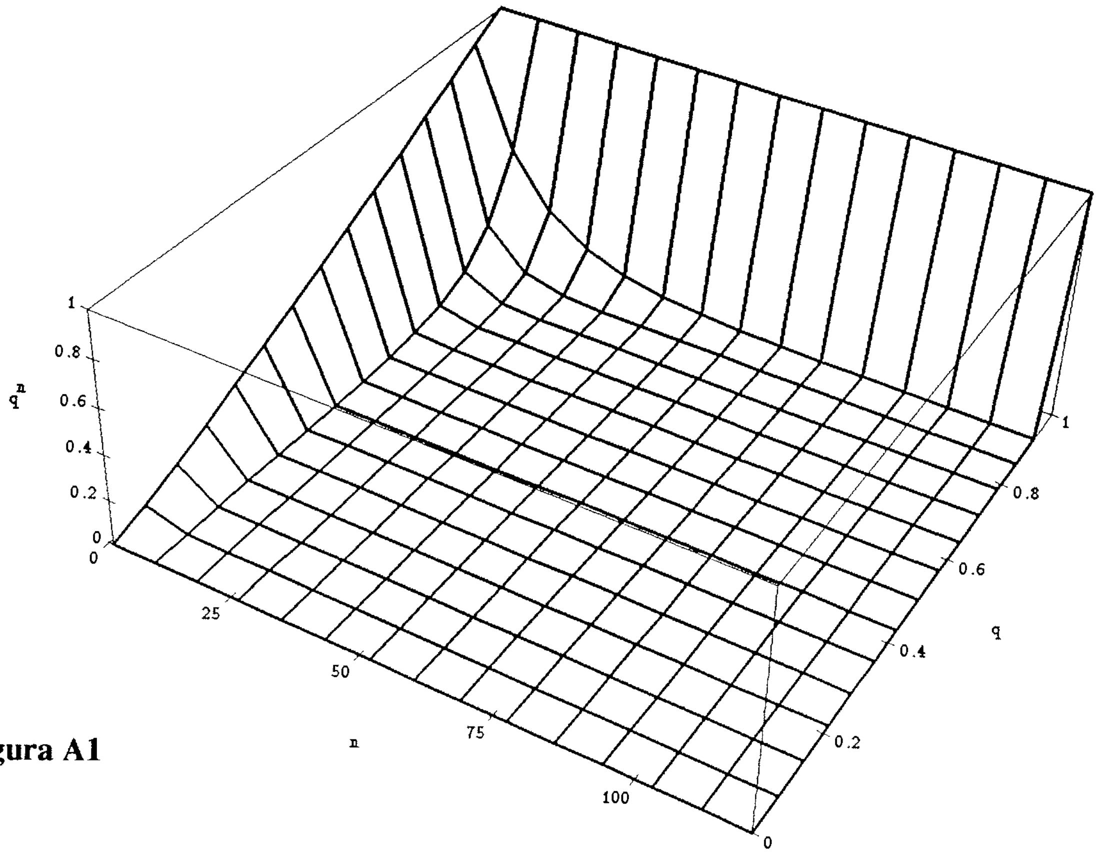


Figura A1

Di conseguenza, possiamo limitarci ad analizzare l'andamento della curvatura evidenziato da tale superficie lungo i sentieri di equilibrio seguiti dai prodotti in monopolio (pubblico e privato) e in duopolio. La curvatura di una superficie è definibile come il reciproco del raggio della sfera osculatrice[21] alla superficie in quel punto.[22] Per calcolare il valore del raggio, è sufficiente risolvere il seguente sistema:

$$r^2 = (\overline{n} - n_0)^2 + (\overline{q} - q_0)^2 + (\overline{c} - c_0)^2 \qquad (a1$$

$$\frac{\delta c}{\delta n}\Big|_{\overline{P}} = \overline{n} - n_0 \qquad (a2$$

$$\frac{\delta c}{\delta q}\Big|_{\overline{P}} = \overline{q} - q_0 \qquad (a3$$

$$-1 = \overline{c} - c_0, \qquad (a4$$

per ogni punto $\overline{P} = (\overline{n}, \overline{q}, \overline{c})$ che appartenga ai sentieri di equilibrio seguiti dai prodotti nel corso della simulazione. Le soluzioni del sistema (a1-a4), che sono n_0, q_0, c_0 ed r, rappresentano le coordinate del centro ed il valore del raggio della sfera osculatrice (quest'ultimo, evidentemente, è quello che ci interessa), per ogni punto individuato dalla simulazione lungo la superficie del costo unitario. Definita la curvatura della superficie come $\rho = \frac{1}{r}$, è possibile riassumerne il comportamento attraverso la tabella A1. La notazione, naturalmente, ha il significato usuale.

Come risulta evidente, la curvatura aumenta all'aumentare di n (se si eccettuano alcune piccole oscillazioni in ρ_H^M) e risulta $\rho_H^M < \rho_H^D < \rho_L^M < \rho_L^D, \quad \forall n$. In altri termini, questo significa che, a parità di esponente, la curvatura del costo unitario associato a ciascun bene prodotto in duopolio è superiore a quella associata al suo corrispondente prodotto in monopolio (pubblico o privato).

---

21. Per sfera osculatrice si intende la sfera tangente alla superficie nel punto di interesse, e tale da simularne il comportamento in quello stesso punto: questo richiede che il piano tangente alla superficie e quello tangente alla sfera, in quel punto, coincidano.

22. Oltre a quello che abbiamo appena esposto, e che è sufficiente ai nostri fini, è possibile definire i concetti di curvatura principale, media e gaussiana, per i quali rimandiamo il lettore interessato ad un qualsiasi testo di geometria differenziale; *inter alia*, Ledermann (1982, vol. V, pp.423 e ssgg.).

n	ρ_H^M	ρ_H^D	ρ_L^M	ρ_L^D
10/9	0.7109	0.7109	0.7734	0.7622
9/8	0.7137	0.7131	0.7802	0.7684
8/7	0.7160	0.7158	0.7884	0.7759
7/6	0.7194	0.7192	0.7986	0.7854
6/5	0.7240	0.7236	0.8115	0.7976
5/4	0.7301	0.7294	0.8283	0.8140
4/3	0.7390	0.7376	0.8509	0.8370
3/2	0.7525	0.7497	0.8824	0.8714
2	0.7758	0.7683	0.9268	0.9272
3	0.7944	0.7796	0.9541	0.9686
4	0.8020	0.7832	0.9634	0.9843
5	0.8062	0.7858	0.9680	0.9918
6	0.8087	0.7888	0.9707	0.9958
10	0.8135	0.8054	0.9753	0.9998
11	0.8139	0.8099	0.9759	0.9999
12	0.8143	0.8147	0.9764	1
15	0.8154	0.8252	0.9774	1
20	0.8164	0.8355	0.9782	1
30	0.8180	0.8443	0.9791	1
40	0.8177	0.8475	0.9794	1
50	0.8188	0.8499	0.9798	1
60	0.8181	0.8518	0.9800	1
80	0.8188	0.8526	0.9801	1
100	0.8197	0.8536	0.9804	1
120	0.8190	0.8533	0.9804	1

Tabella A1